ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLIV, zeszyt 3 – 1996

ZENON EUGENIUSZ ROSKAL
Lublin

NOWE IDEE W MATEMATYCE XVII I XVIII WIEKU

Idea rachunku różniczkowego i całkowego była centralną ideą XVII i XVIII-wiecznej matematyki i jako taka miała wpływ na kształtowanie się nowożytnego matematycznego przyrodoznawstwa oraz, pośrednio, wpływała na ewolucję pojęć (ruch, lokalizacja, nieskończoność) w filozofii przyrody. Rozwój pojęć analizy matematycznej był przedmiotem klasycznych już prac M. Cantora, H. Wieleitnera i C. B. Boyera, ale i w późniejszym okresie doczekał się również interesujących opracowań (por. przyp. 4).

Toteż celem tego artykułu nie jest uszczegółowienie historii tego działu matematyki, ale próba spojrzenia na zagadnienie rozwoju idei rachunku różniczkowego i całkowego od strony relacji, jakie tworzą te idee z centralnymi kategoriami filozofii przyrody m.in. z czasem, przestrzenią i ruchem.

Relacje te nie zostały wystarczająco dokładnie przeanalizowane, a są niewątpliwie bardzo interesujące z filozoficznego punktu widzenia. Przedstawiając źródła metod nieskończonościowych i ich ujęcia na gruncie matematyki nowożytnej staramy się uwypuklić fakt geometryczno-kinematycznych korzeni tych metod oraz trudności w przezwyciężaniu poglądowych interpretacji formalizmu analitycznego. Fakty te miały swoje źródło w kontekście pierwotnego ujęcia problematyki analitycznej. Historycznie rzecz biorąc główne zagadnienia analizy matematycznej pojawiły się na gruncie mechaniki i tam były systematycznie rozwiązywane. Odkąd matematyka rozszerzyła zakres swoich zainteresowań poza tradycyjną problematykę wielkości stałych sięgając po nowe obiekty i metody (wielkości zmienne, metody nieskończonościowe) analogie do ruchu mechanicznego oraz intuicje związane z tradycyjnymi koncepcjami przestrzeni i czasu znalazły się w centrum ówczesnych matematycznych procedur dowodowych. Wraz z przeniesieniem struktury rachunku różniczkowego i całkowego (w wersji Leibniza) do mechaniki (w pracach Eulera, Clairauta, d'Alemberta, Lagrange'a i Laplace'a) w samej analizie matematycznej daje się zaobserwować proces emancypacji procedur dowodowych od geometryczno-mechanicznych (kinematycznych) intuicji. Proces ten obok uwarunkowań *stricte* matematycznych posiadał też zależności natury filozoficznej.

Zgodnie z pozytywistyczną koncepcją nauki (w pierwotnym ujęciu d'Alemberta) w zależności od stopnia ogólności, a zatem też i abstrakcyjności swojego przedmiotu, nauki dzielą się na mniej i bardziej abstrakcyjne. Podstawą dla nauki mniej abstrakcyjnej jest zawsze nauka bardziej abstrakcyjna, ale najbardziej abstrakcyjna (według d'Alemberta) jest analiza matematyczna. Stąd to nie mechanika ma stanowić podstawę analizy, ale właśnie odwrotnie – analiza matematyczna ma być podstawą mechaniki. Zatem źródłem postulatu metodologicznego redukcji mechaniki do analizy oraz, pośrednio, eliminacji z procedur dowodowych analizy intuicji ruchu, czasu i przestrzeni była pozytywistyczna koncepcja nauki (podział nauk). Realizacją tego pozytywistycznego programu metodologicznego była *sui generis* „algebraizacja" samej analizy matematycznej.

Uniezależnienie się analizy, a pośrednio także całej matematyki i w efekcie także mechaniki, od restryktywnego wpływu kategorii tradycyjnej filozofii przyrody umożliwiło z kolei konstruowanie fizycznego obrazu świata częściowo niezależnego od świadectwa bezpośredniego doświadczenia zmysłowego i legło u podstaw fizyki współczesnej.

Historyczno-filozoficzne uwarunkowania tego procesu stanowią główny przedmiot niniejszego artykułu. Z kolei tendencje algebraizacyjne (m.in. niezgodne z aktualnymi standardami ścisłości rozwinięcia funkcji w szeregi nieskończone) mogą jednak świadczyć zarówno o braku ścisłości matematycznej (i zarazem względności tego pojęcia) według standardów zaproponowanych przez A. Cauchy'ego i K. Weierstrassa, jak i (a może przede wszystkim) o przebijaniu się formalistycznego punktu widzenia na zagadnienia podstaw analizy matematycznej, co według autora niewątpliwie miało miejsce w pracach Leibniza i Lagrange'a. Wątki te zostaną jedynie tylko naszkicowane, gdyż ich szczegółowa analiza wykracza poza ramy tego artykułu.

1. ANTYCZNE I NOWOŻYTNE ŹRÓDŁA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

Centralnym wydarzeniem w matematyce XVII wieku było powstanie rachunku różniczkowego i całkowego. Korzenie tego faktu sięgają aż do matematyki greckiej, ale zasadnicze rysy nowego rachunku tworzą idee matematyczne, które pojawiły się właśnie w XVII wieku. Wówczas to z mnogości metod nieskończonościowych wykrystalizowały się algorytmy różniczkowania i całkowania oraz dostrzeżono ich wzajemnie odwrotny charakter. Jednakże stało się to możliwe dopiero wtedy, gdy treść zadań, które rozwiązywano najczęściej konstrukcyjnymi metodami geometrii, przeformułowano na język analityczny. Klasyczne zadania na kwadratury i kubatury uzyskały wtedy algebraiczną formę, a przez to odkryta została ich arytmetyczna treść. Był to analogiczny proces do tego, który doprowadził do powstania geometrii analitycznej. Algorytmizacja analitycznie wyrażonych metod nieskończonościowych doprowadziła z kolei do wykrycia wzajemnych związków pomiędzy arytmetyką, algebrą i geometrią a przez to, do integracji problematyki matematycznej. Heurystyczna płodność algorytmizacji przekonała matematyków co do skuteczności tej procedury i zaowocowała jej naturalnym przeniesieniem do nowego obszaru problematyki matematycznej – do teorii izoperymetrów. W krótkim czasie doprowadziło to do analitycznego ujęcia mechaniki newtonowskiej, a w konsekwencji do unifikacji mechaniki na gruncie formalizmu wariacyjnego.

Matematyczne ujęcie zjawiska ruchu umożliwiło również powolne odchodzenie od pojęć klasycznej (arystotelesowsko-tomistycznej) filozofii przyrody. W szczególności zakwestionowano arystotelesowską koncepcję ruchu, ale także problematyczna stała się np. klasyczna definicja ciągłości. Kategoria czasu długo była obecna w procedurach dowodowych nowożytnej matematyki, lecz również i tę kategorię sukcesywnie modyfikowano i systematycznie eliminowano z metod analizy matematycznej. Nasilenie tego procesu daje się zauważyć w pracach Eulera i Lagrange'a, a kontynuację (z różną intensywnością) obserwujemy aż do czasów nam najbliższych.

1. 1. Metody nieskończonościowe w starożytności

Rozważania dotyczące matematycznego aspektu zagadnienia ciągłości doprowadziły matematyków greckich do wypracowania licznych metod nieskończonościowych, które pozwalały na rozwiązanie wielu zadań na rektyfikację linii krzywych, kwadraturę pól powierzchni płaskich, kubaturę objętości brył i wyznaczanie środków ciężkości. Heurystycznie najbardziej płodne okazały się te, które opierały się na idei atomizmu matematycznego. Jednakże racjonalistycznie zorientowani matematycy odrzucili je wypracowując takie metody, które były zgodne z ich ideałem ścisłości matematycznej.

Źródłem tych metod był lemat Eudoksosa–Euklidesa zawarty w księdze pierwszej Elementów Euklidesa (tw. X). Oparta na nim metoda nazywała się metodą wyczerpywania Eudoksosa[1].

---

[1] Termin ten jest znacznie późniejszy, pochodzi bowiem od flamandzkiego jezuity Gregoriusa Saint-Vincenta, który w pracy *Dzieło geometryczne o kwadraturze koła i stożkowych* (*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, Antverpiae 1647) w kontekście omawiania procesu wpisywania w dwie bryły, które należało porównać, dużej ilości bardzo cienkich równoległościanów starał się wykazać, że liczbę ich można zwiększać dotąd, aż one wyczerpią tę bryłę, w którą je wpisano (Parallelepida illa ita posse multiplicari ut corpora ipsa, quibus inscribuntur, exhuriant s. 739). I choć ściśle biorąc nie ma mowy o faktycznym

Była to próba ominięcia tych samych trudności, jakie pojawiły się już w wypadku wielkości niewspółmiernych. Odpowiedzią na tamte trudności była teoria proporcji Euklidesa–Eudoksosa, teraz zaś metoda wyczerpywania. Głębszą przyczyną tych wszystkich trudności była z kolei dominacja geometrii nad arytmetyką i algebrą w matematyce antycznej. Traktowanie pojęcia przystawania jako bardziej pierwotnego niż pojęcie liczby oraz brak rozwiniętej symboliki literowej, było zewnętrznym objawem tego stanu rzeczy. Przyczyny były natury filozoficznej. Do najważniejszych z nich zaliczyć należy przyjęty powszechnie przez matematyków greckich realizm (ontologiczny i epistemologiczny). Aczkolwiek pod wpływem filozofii Platona daje się zauważyć tendencja do idealizacji obiektów matematyki, to jednak matematycy tej epoki nie mogli uwolnić się od postulatu interpretowalności obiektów matematyki w przedmiotach świata empirycznego. Była to świadoma ucieczka od abstrakcji w celu zachowania zgodności świadectwa zmysłów z teoretycznymi konstrukcjami. W efekcie nawet tak płodny i twórczy matematyk starożytności, jakim był niewątpliwie Archimedes, wypracował tylko wiele niezależnych metod i rozwiązań (kwadratura paraboli, kubatura paraboloidy obrotowej, środki ciężkości konoidy i sferoidy, itd.), ale nie dokonał klasyfikacji zadań ani tym bardziej, nie podał ogólnych algorytmów ich rozwiązywania. Niemniej jego wpływ na rozwój metod nieskończonościowych jest ogromny, a powstanie rachunku różniczkowego jest bezpośrednim następstwem odrodzenia się tradycji archimedesowej[2] na gruncie nauki renesansu.

---

wyczerpaniu, to jednak termin ten jest tak udany i sugestywny, że przyjął się powszechnie. Por. także monografię W. R. Knorra, *The Ancient Tradition of Geometric Problems. The evolution of the Euclidean elements. A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry* (Dordrecht 1975. Hrsg. D. Reidel), w której szczegółowo omawia się zagadnienie wpływu teorii wielkości niewspółmiernych Eudoksosa m.in. na rozwój metod nieskończonościowych. W pracy M. S. Mahoneya, *Another Look at Greek Geometrical Analysis*, („Archive for History of Exact Science" 5(1968), s. 318-348) bronione jest stanowisko, według którego źródłem XVII-wiecznej analizy matematycznej były z jednej strony metody greckiej geometrii (m.in. metoda wyczerpywania), z drugiej zaś symbolika algebraiczna F. Vièta'a.

[2] Obok zachowanego i przekazanego nowożytności tekstu *Elementów* Euklidesa, dzieła Archimedesa były głównym źródłem matematyki nowożytnej. Pierwsze łacińskie wydanie traktatów Archimedesa *Pomiar koła*, *Kwadratura paraboli* i jeszcze kilka mniejszych ze statyki i hydrostatyki w XIII-wiecznym przekładzie Wilhelma z Moerbecke ukazało się w Wenecji (dwukrotnie w 1503 i 1543 r.). Grecki tekst wszystkich znanych wówczas dzieł Archimedesa z komentarzami Eutokiosa, razem z łacińskim przekładem Jakuba z Kremony (przeredagowanym przez Regiomontanusa) wydał Thomas Gechauff (Venatorius). Dzieło to wyszło w Bazylei w 1544 r. Czternaście lat później, w Wenecji wyszły powtórnie przetłumaczone i skomentowane przez F. Commandina dzieła matematyczne Archimedesa. Nowoczesne, kanoniczne wydanie wszystkich dzieł Archimedesa przygotował J. L. Heiberg (wydanie 2, Leipzig 1910-1915). Szeroko o genezie pracy Archimedesa *O pomiarze kuli* pisze W. R. Knorr (*Archimedes' Dimension of the circle: A view of the genesis of the extant text*, „Archive for History of Exact Sciences", 35(1986), s. 281-324)

1. 2. Rozwój metod nieskończonościowych w nowożytnej matematyce

Do tradycji tej nawiązywali wszyscy twórczy matematycy XVI i XVII wieku. W ich pracach krystalizowały się zalążki przyszłych ogólnych metod, chociaż to, co wypełniało większą część ich treści, to rozwiązania ważnych zagadnień szczegółowych. Do najważniejszych prac tej serii należą: *Trzy księgi o środku ciężkości brył* (*De centro gravitatis solidorum libri tres*, Romae 1604) Luca Veleria, *Cztery księgi o cylindrykach i pierścieniach* (*Cylindricorum et annularium libri IV*, Antverpiae 1651) Andre'a Tocqueta, *Elementy hydrostatyki* (*De Beghinselen des Waterwihts*, Leiden 1586) Simona Stevina, *Prawdziwa kwadratura koła i hiperboli* (*Vera circuli et hiperbolae quadratura*, Patavii 1667) i *Uniwersalna część geometrii* (*Geometriae pars universalis*, Patavii 1668) Jamesa Gregory'ego, *Nowa stereometria beczek do wina* (*Nova stereometria doliorum vinariorum*, Lincii 1615) J. Keplera oraz *Geometria przedstawiona pewnym nowym sposobem za pomocą niepodzielnych wielkości ciągłych* (*Geometria indivisibilibus continuarum nova quadam ratione promoto*, Bononiae 1635) Bonawentury Cavalieriego.

W tym czasie pojawia się również nowe pojęcie funkcji[3]. Następnie rozwijana jest teoria szeregów nieskończonych, pozwalająca na analityczne przedstawianie nowych typów funkcji znalezionych w praktyce rachunkowej.

[3] Zalążki pojęcia funkcji występują w matematyce greckiej (zależności występujące w akustyce i trygonometrii, symptomy), ale nie ma tam analitycznego przedstawienia funkcji. Matematycy starożytni mieli do czynienia jedynie z funkcjami ujętymi w tablice (trygonometria) lub w postaci słownych sformułowań (symptomy). W Europie średniowiecznej pojęcie funkcji występuje w szkole oxfordzkiej (Swineshead) i w teorii konfiguracji jakości Oresme'a, ale jest to słowne lub graficzne przedstawienie zależności. Oddzielnego terminu nie było. Posługiwano się rozszerzonym terminem stosunek (proportio). Rozwój metod numerycznych w trygonometrii, pojawienie się logarytmów i rozszerzenie pojęcia liczby w końcu XVI w. zaowocowało właśnie pojawieniem się pojęcia funkcji jako wyrażenia analitycznego. Termin „funkcja" pojawił się po raz pierwszy w rękopisie Leibniza z 1673 r. zatytułowanym *Metoda stycznych odwrotna czyli o funkcjach* (*Methodus tengentium inversa, seu de functionibus*). Leibniz używa tego terminu korzystając ze źródłosłowów łacińskich „fungor", „functus sum", „fungi" (realizować, wypełniać, wyrażać). Symbolikę i definicję dyskutuje Leibniz z Janem Bernoullim. Po raz pierwszy w druku definicja pojęcia funkcji jako wyrażenia analitycznego pojawia się w artykule J. Bernoulliego ogłoszonym w *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* z roku 1718 w następującej formie: „Funkcją wielkości zmiennej nazywa się ilości zestawione w jakikolwiek sposób z wielkości zmiennej i ze stałych" (J. Bernoulli, *Opera omnia*, t. II, Lausanae–Genevae 1742, s. 241). Leibniz zaproponował jako charakterystykę funkcji grecką literę φ pisząc argumet bez nawiasów φx, a dopiero Euler w 1734 r. zaproponował używany współcześnie symbol f(x). Por. D. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*, Berlin 1926, s. 47, 158 oraz F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, t. II, London 1930, s. 267. Wyczerpująco o dziejach pojęcia funkcji pisze A. P. Juszkiewicz (*The concept of the function up to the middle of the 19th century*), „Archive for History of Exact Sciences", 16(1982), s. 37-85.

Ważnych odkryć w dziedzinie szeregów nieskończonych dokonali niezależnie Mercator (Nicolaus Kauffmann), J. Hudde i I. Newton. Najbardziej znane i rozpowszechnione okazało się dzieło Mercatora (*Logaritmotechnia*, Londini 1668), w którym idąc śladami J. Wallisa, przedstawia analityczne rozwinięcie funkcji logarytmicznej w szereg potęgowy (bez badania warunków zbieżności). Wszystkie te odkrycia miały bezpośredni wpływ nie tylko na samą matematykę, ale również na inne dziedziny ludzkiego poznania. W szczególności dotyczy to mechaniki, ale ma to również przełożenie na refleksję filozoficzną, a nawet teologiczną. Ożywione polemiki, których przedmiotem były właśnie problemy wyrosłe z posługiwania się szeregami nieskończonymi, prowadzili wówczas m.in. Guido Grandi, Leibniz i Varignon. Newton i Hudde rezultatów swoich odkryć jednak nie opublikowali, ale impuls był na tyle silny, że rozpoczął erę nieograniczonego wręcz posługiwania się szeregami nieskończonymi do przedstawiania zależności funkcyjnych. Procedury te stanowiły jedno z głównych źródeł późniejszego algorytmu różniczkowego i całkowego Leibniza.

Niezależnie od tych odkryć dokonuje się systematyczny postęp w rozwiązywaniu konkretnych zadań. Z jednej strony, w związku z rozwojem mechaniki i astronomii, na plan pierwszy wysuwają się zadania rachunku całkowego, takie jak: wyznaczanie środków ciężkości, obliczanie drogi z danego prawa prędkości itd., z drugiej zaś rozwiązywano takie zadania, jak wyznaczanie kątów nachylenia dla maksymalnego zasięgu pocisków czy ogólniej – problem znalezienia stycznej do danej krzywej. Stosowano w tym celu różne metody nieskończonościowe, w tym czysto matematyczne (geometryczne i algebraiczne) i kinematyczne. Rozwiązania tych zagadnień oraz zadań czysto geometrycznych, dotyczących wyznaczania pól powierzchni i objętości figur geometrycznych były wielokrotnie sprowadzane do znanych już rozwiązań zadań podobnych. Tym sposobem pojawiają się zalążki klasyfikacji problemów, a tym samym ich redukcji do tych, które posiadają podobną strukturę formalną. Proces ten zostanie przyspieszony wówczas, gdy problematyka analityczna oswobodzona zostanie od języka geometrii.

W praktyce badawczej matematyków XVII wieku odpowiednikiem redukcji problemów analitycznych było częste sprowadzanie kwadratur skomplikowanych krzywych algebraicznych i niealgebraicznych (przestępnych) do znanych kwadratur koła i hiperboli. W związku z brakiem funkcji trygonometrycznych ta procedura badawcza miała dodatkowe znaczenie – stwarzała podstawy do jego zbudowania.

Metoda kinematyczna przyczyniła się do wykrycia wzajemnego związku pomiędzy zadaniami z obszaru rachunku całkowego i różniczkowego. W sposób naturalny pojawiła się interpretacja stycznej jako granicznego położenia siecznej przechodzącej przez dwa nieskończenie bliskie punkty trajektorii. Prowadziło to do ujawnienia wewnętrznego związku pomiędzy zadaniami całkowymi i różniczkowymi, ale równocześnie wiązało podstawy nowego rachunku z intuicją mechaniczną (kinematyczną). Jedną z pierwszych prób przezwyciężenia tego stanu rzeczy była algebraiczna metoda kreślenia stycznych i normalnych Kartezjusza, ale dopiero praca P. Fermata *Metoda poszukiwania maksimum i minimum* (*Methodus ad disquirendum maximum et minimum*) z 1629 r. dawała pierwsze algorytmy rachunku pozwalające całkować, różniczkować i znajdować ekstrema.

Nadal jednak brak było jeszcze stosownej symboliki, a reguły algorytmów formułowane były najczęściej słownie. W końcu lat pięćdziesiątych reguły Fermata, oddzielne dla poszczególnych rodzajów rachunku próbowali formalizować J. Hudde, René François de Sluse i Ch. Huygens. Nie były to jednak próby udane. Najdalej w formalizacji metody stycznych posunął się nauczyciel Newtona – I. Barrow.

Opierając się na idei trójkąta charakterystycznego i wielkościach nieskończenie małych, w pracy zatytułowanej *Wykłady optyki i geometrii* (*Lectiones opticae et geometriae*, Londini 1669-1670), próbował algebraizować metody kreślenia stycznych. I. Barrow przedstawił również znacznie dojrzalszą i wygodniejszą symbolikę niż Fermat, ale wykład jego jest jednak z gruntu geometryczny i, co ważniejsze, co jest konsekwencją geometrycznej stylizacji, nie dostrzega wzajemnej odwrotności zadań na kwadratury i styczne.

2. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY W WERSJI NEWTONA I LEIBNIZA

Odmiennie te zagadnienia przedstawiają się w pracach Newona i Leibniza. Wzajemna odwrotność różniczkowania i całkowania, czyli mówiąc językiem XVII-wiecznych matematyków – zadań na kwadratury i styczne, *implicite* zawarta w pracy Barrowa, nie była jednak dostatecznie czytelna. Stała się nią natomiast wówczas, gdy Newton i Leibniz podali analityczny sposób wyrażania operacji całkowania i różniczkowania. Droga do analizy współczesnej stanęła wówczas otworem. Zrywając z przeszłością, Newton i Leibniz, postanowili zintegrować wszystkie te metody na wyższym poziomie abstrakcji i szukać ich uzasadnienia nie w ścisłych dowodach, lecz w obfitości i wzajemnym powiązaniu rezultatów. System Newtona poprzez niezbyt udaną symbolikę oraz próbę oparcia centralnych pojęć nowego rachunku (flukcji i fluenty) na intuicji kinematycznej nie mógł być jednak podstawą późniejszych uogólnień[4].

---

[4] S. Di Sieno, M. Galuzii, *Calculus and geometry in Newton's mathematical work: Some remarks*, w: S. Rossi (ed), *Science and imagination in 18th-century British Culture*,

Dodatkowo obciążała go idea uniwersalnego parametru czasowego. Mówiąc językiem Lagrange'a: „Newton wprowadził do matematyki ideę obcą". W jego koncepcji rachunku różniczkowego nie było również prób algorytmizacji metod nieskończonościowych na gruncie teorii funkcji analitycznych.

2. 1. Rachunek fluksji i fluent Newtona

Newton stosunkowo wcześnie opanował algorytmy nowego rachunku. Od wiosny do jesieni 1665 r. opracował metody fluksji wyraźnie podkreślając wzajemnie odwrotny charakter różniczkowania i całkowania. Wyrażał to przez regularne zapisywanie w równoległych kolumnach całek i pochodnych. Wyniki swoich wczesnych prac zawarł w rękopisie zatytułowanym *Następujące twierdzenia wystarczające do rozwiązywania zadań za pomocą ruchu* (*To resolve Problems by Motion these following Propositions are sufficient*). W 1669 r. miał już kolejny rękopis, w którym nowy rachunek rozumiał jako analizę za pomocą równań z nieskończoną liczbą wyrazów. W latach 1670-1671 przygotował dzieło zatytułowane *Metoda fluksji i szeregów nieskończonych* (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*), w którym podał szczegółowy i systematyczny wykład nowego rachunku wraz z zastosowaniami. Podobnie jednak, jak wielu jemu współczesnych, w swoich wczesnych pracach posługiwał się nieścisłymi rozwinięciami funkcji w szeregi nieskończone i używał pojęcia nieskończenie małych wielkości przy geometrycznych interpretacjach. Później, głównie jako metoda heurystyczna, pojawiła się jego teoria fluksji i fluent, natomiast teoria „ostatnich stosunków" miała stanowić *sui generis* uściślenie i uzasadnienie tych dwóch poprzednich teorii. Przy czym teorie te nie stanowiły dla siebie konkurencji, ale pozostawały w relacji wzajemnego dopełniania. Niestety w wieku XVIII stan świadomości uczonych angielskich nie dopuszczał takiej interpretacji. Wydawało się im bowiem, że wersja rachunku różniczkowego przedstawiona przez Newtona jest ostateczna i doskonalsza od wersji Leibniza. Ten stan rzeczy uległ jeszcze dodatkowej komplikacji na skutek postawy same-

---

Milano 1987, s. 177-189, Unicopli. W szczególności na temat rachunku fluksji i fluent Newtona pisze P. Kitcher (*Fluxions, Limits, and Infinite Littlenesse. A study of Newton's Presentation of the Calculus*, „Isis" 64(1973), s. 33-49. Studium rachunku fluksji Newtona autor rozwija następnie w obszerne „case study" rozwoju analizy matematycznej, stanowiącej „sui generis" ilustrację dla ogólniejszych rozważań o rozwoju wiedzy matematycznej. Por. P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York–Oxford 1984, Oxford University Press. Z nowszych opracowań historii analizy matematycznej godnymi uwagi są następujące monografie: J. V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Cambridge–London 1981, M. I. T. Press; U. Bottazzini, *The Higer Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, New York 1986, Springer Verlag.

go Newtona. Autor teorii fluksji i fluent z wielu względów dzieł swoich nie opublikował[5], co stało się m.in. źródłem konfliktu pomiędzy nim a Leibnizem o priorytet w odkryciu nowego rachunku.

2. 2. Ujęcie algebraiczne rachunku różniczkowego i całkowego Leibniza

Ujęcie rachunku różniczkowego zaproponowane przez Newtona nie przyjęło się jednak na kontynencie. Rachunek fluksji pozostał aż do lat trzydziestych XIX wieku własnością jedynie matematyków angielskich. Zupełnie odmienną koncepcję przedstawił natomiast Leibniz. Nawiązując do idei *mathesis universalis* Kartezjusza oraz do pewnych pomysłów Ramona Lulla i Joachima Junga próbował stworzyć pewien rodzaj algorytmu wszystkich formalnych nauk opartego jedynie na aparacie logiki symbolicznej. Matematyka uniwersalna była dla Leibniza swego rodzaju l o g i k ą w y o b r a ź n i i powinna zajmować się wszystkim, co może być ściśle określone. W związku z powyższym, matematyka była dla niego nauką ogólną, której przedmiotem są jedynie abstrakcyjne relacje pomiędzy jej obiektami. Przy tym obiektem matematyki może być każdy przedmiot ściśle zdefiniowany i tym samym nie jest wymagane, aby posiadał on interpretację w obiektach bezpośredniego doświadczenia. Bardziej ogólne od funkcjonującego w owych czasach jest również pojęcie relacji u Leibniza. O ile bowiem rozważane dotąd relacje były wyłącznie relacjami dotyczącymi wielkości (równość, nierówność, proporcja), to Leibniz proponuje rozważanie innych typów relacji, takich jak: z a w i e r a n i e i jednoznaczne lub wieloznaczne w y z n a c z a n i e[6].

Idea ta pojawia się już we wczesnych jego pismach określana jako: n a u k a u n i w e r s a l n a, c h a r a k t e r y s t y k a u n i w e r s a l n a czy wreszcie c h a r a k t e r y s t y k a k o m b i n a t o-

[5] W druku ukazuje się jako pierwszy *Traktat o kwadraturach krzywych* (*Tractatus de quadratura curvarum*) wydany wraz z *Optyką* w 1704 r. Siedem lat później w Londynie ukazuje się *Analiza za pomocą równań o nieskończonej liczbie wyrazów* (*Analysis per equationes numero terminorum infinitas*). Metoda fluksji czekała na druk 65 lat. Wyszła najpierw w przekładzie angielskim J. Colsona, *The method of fluxions and infinite series* (London 1736) Rozwojowi rachunku fluksji w XVIII w. poświęcona jest praca doktorska Niccolò Guicciardiniego, *The development of the Newtonian fluxional calculus in the 18th-century*, „Dissertation Abstracts International", 49(1988), 331-A. O różnych tradycjach rachunku różniczkowego pisze I. Grattan-Guinnes, (*French calcul and English fluxions around 1800*: *Some comparisons and constrats*, w: R o s s i (ed.), dz. cyt., s. 203-214. Por. także, F. C a j o r i, *A History of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Chicago–London 1919.

[6] G. W. L e i b n i z, *Opuscules et fragments inédits*, L. Couturat (ed.), Paris 1903, s. 348, Alcan. Por. także, L. C o u t u r a t, *La logique de Leibniz d'aprés des documents inédits*, Paris 1901, s. 290-291, Alcan.

r y c z n a. Źródłosłowem jest tu greckie słowo χαρακτήρ (charakter) oznaczające f o r m ę i i s t o t ę r z e c z y. Według Leibniza charaktery to dowolne obiekty, za pomocą których można wyrazić wzajemne relacje pomiędzy innymi, trudniej dającymi się przedstawić obiektami. Idee i twierdzenia złożone dają się wyrazić za pomocą prostych formuł złożonych z c h a r a k t e r ó w. Operacje na złożonych ideach można tym samym zastąpić operacjami na prostych c h a r a k t e r a c h[7]. Ponieważ łatwiej jest operować ściśle zdefiniowanymi symbolami, niż bezpośrednio rzeczami, język taki powinien dostarczać prawidłowych rozwiązań. Tym samym uzyskiwało się przekształcenie procedur wiedzotwórczych w ściśle zdefiniowane algorytmy działań na symbolach. Ideę uniwersalnego języka Leibniz zastosował w swoich pracach z logiki, algebry i geometrii, przede wszystkim zaś przy budowie systemu rachunku różniczkowego i całkowego.

Pierwsze badania Leibniza w dziedzinie rachunku różniczkowego sięgają 1672 r., kiedy to w czasie podróży do Paryża zapoznał się z wynikami Ch. Huygensa w tej dziedzinie. W bardzo krótkim czasie przestudiował podstawowe dzieła dotyczące tego nowego rachunku. Były to prace: R. Descartesa, J. Gregory'ego, B. Cavalieri'ego, B. Pascala, J. Wallisa i I. Barrowa. Jesienią 1675 r. miał już opracowane podstawowe metody i symbolikę, w niedługim czasie dopracował szczegóły. Według Leibniza, system rachunku różniczkowego miał trzy źródła: uogólnioną metodę trójkąta charakterystycznego, geometrię analityczną Kartezjusza oraz teorię szeregów nieskończonych Wallisa i Mercatora. Synteza tych idei doprowadziła go do odkrycia wzajemnej odwrotności zadań na konstrukcję stycznych i kwadratur. Zadania te traktował właśnie jako swego rodzaju algorytmy i interpretował w duchu c h a r a k t e r y s t y k i u n i w e r s a l n e j. Ponieważ zawsze silnie pociągała go arytmetyczna strona matematyki, podstawowe zadania odkrytego przez siebie rachunku rozumiał w sposób geometryczno-analityczny i wyrażał w języku arytmetyki i algebry. W tym m.in. przejawiała się różnica w jego ujęciu rachunku różniczkowego w stosunku do ujęcia Newtona. Twórca rachunku fluksji pojmował bowiem problematykę analityczną w sposób geometryczno-fizyczny, a wyrażał ją językiem kinematyki.

Leibniz był też świadom, że jego rachunek jest nową dyscypliną matematyczną, aczkolwiek nie przykładał większej uwagi (w przeciwieństwie do Newtona) do uzasadnienia tego. Rozumiał, że nowy rachunek jest swego rodzaju *modus operandi* i jako taki sam stanowi swoje uzasadnienie. Był pewien, że gdyby jasno sformułować reguły działań i zastosować je właściwie, to przyniosłoby to poprawne rezultaty. Podstawowe algorytmy nowego rachunku Leibniz

[7] G. W. L e i b n i z, *Mathematische Schriften*, C. I. Gerhardt (ed.), t. V, Halle 1861 s. 141.

zawarł w pracy, która ukazała się w maju 1684 r. w „Acta Eruditorum". Centralnym pojęciem jest tutaj różniczka funkcji i choć terminu funkcja w pracy jeszcze nie ma, a różniczki nazywa różnicami, to można powiedzieć, że właśnie w tej pracy, w języku geometrycznym, pojęcie to zostaje po raz pierwszy wprowadzone. Obok definicji pojęcia różniczki są tam także algorytmy różniczkowania sumy, iloczynu i ilorazu, dowolnej stałej potęgi i pierwiastka. Omawia też metody znajdowania maksimum, minimum i punktów przegięcia krzywych i to zarówno algebraicznych jak i przestępnych. Nie są jednak istotne dla tej pracy poszczególne rezultaty (większość z nich była znana Newtonowi), ale styl i sposób stawiania oraz rozwiązywania problemów. Ważny był system nowych symboli, najważniejszą jednak rzeczą był pomysł metody, która miałaby stanowić rozwiązanie wielu różnorodnych zagadnień, traktując je jako przypadki szczególne. Metodę tę rozwija następnie w artykule zatytułowanym *O głębszej geometrii oraz o analizie niepodzielnych i nieskończonych* (*De geometria recondita et analisi indivisibilium et infinitorum*), który ukazuje się w „Acta Eruditorum" za rok 1686.

Po raz pierwszy w druku pojawia się tam symbol całki nieoznaczonej, $\int$ i wykazany jest jej operatorowy charakter. Symbol różniczki d rozumie jako operator odwrotny do operatora całki. Leibniz kilkakrotnie podkreśla, że o ile $\int$ zwiększa liczbę wymiarów to d ją zmniejsza[8].

Leibniz wskazuje przy tym na analogię pomiędzy działaniami na liczbach np. dodawaniem – odejmowaniem, potęgowaniem – pierwiastkowaniem a działaniami na operatorach, $\int$ i d, tzn. całkowaniem i różniczkowaniem. Podstawą jego systemu rachunku różniczkowego i całkowego jest jednak *różniczka* rozumiana jako nieskończenie mały odcinek odciętej (różniczka zmiennej niezależnej), bądź jako odcinek mający się do dx jak rzędna do odpowiedniej podstycznej (różniczka funkcji). Pochodną przy takim ujęciu rozumie jako stosunek tych różniczek tzn. $\frac{dy}{dx}$, całkę natomiast jako nieskończoną sumę różniczek: $\int dx$. Nie wyróżnia przy tym pojęcia całki oznaczonej i nieoznaczonej oraz nie

[8] Jeszcze w październiku 1675 r. wyraża kwadratury, interpretuje je w duchu atomizmu matematycznego pisząc: *wszyskie w* (*omnia w*), gdzie „w" są rzędnymi, ale już 29 października zauważa, że zamiast *omn. w* lub *omn. l* korzystniej byłoby pisać $\int l$, tzn. suma linii l. Ponieważ operacja różniczkowania obniżyła wymiar, z początku Leibniz pisał symbol d w mianowniku, co dawało symbole $\frac{x}{d}$ lub $\frac{y}{d}$, ale już 11 listopada pojawiają się znane nam symbole: dx i dy. Symbol $\int$ pochodzi od stylizowanego słowa łacińskiego „summa", podobnie symbol d pochodzi od pierwszej litery słowa „differentia" (różnica). Słowo „integrał" (w języku polskim oddawane zgodnie z propozycją Jana Śniadeckiego jako („całka") pojawiło się po raz pierwszy u Jana Bernoulliego, a w druku (1690), w artykule Jakuba Bernoulliego. Por. B. Petronievics, *Über Leibnizens Methode der direkten Differentiation*, 22(1934), s. 69-76, Isis; C. I. Gerhardt, *Die Entdeckung der höheren Analysis*, Halle 1855, s. 125-126.

wprowadza terminów g ó r n a i d o l n a granica całkowania. Siłą rzeczy pojawiają się różniczki różnych rzędów tzn. dx^2, dx^3 itd.

Leibniz nie podaje ich zadowalających definicji, pisze natomiast, że dx^2 ma się tak do dx jak dx do x; nie odróżniając przy tym różniczek zmiennych zależnych i różniczek zmiennych niezależnych. Często powołuje się na analogie do stosunków skończonych wielkości, czasami zaś opiera się na zasadzie ciągłości, co sprawę jeszcze bardziej komplikowało i zaciemniało. Eksplikacja ta wiązała się z jego filozofią. Wypada zauważyć, że nie było to ujęcie pozwalające na rozwiązanie problemu podstaw nowego rachunku. Leibniz oczywiście nie pozostawił systemu wykończonego, nie wyjaśnił też wszystkich pojęć, gdyż przekraczało to możliwości nawet tak głębokiego umysłu, niemniej przekazał bardzo wygodny system notacji o charakterze algebraicznym oraz ideę rachunku różniczkowego i całkowego jako systemu algorytmów różniczkowo-algebraicznych. Podniósł też znacznie poziom abstrakcji omawianego rachunku, wprowadzając zunifikowane metody rozwiązywania zagadnień, pozwalające klasyfikować je i rozwiązywać według określonych typów (np. według typu całki czy typu równania różniczkowego).

W stosunkowo bliskiej perspektywie pozwoliło to na szybki rozwój analizy matematycznej, wyeliminowanie z niej intuicji geometrycznej i mechanicznej i zbudowanie jej podstaw za pomocą środków czysto algebraicznych[9] oraz, w konsekwencji, na unifikację mechaniki na gruncie zreformowanego aparatu analitycznego.

Dzieła tego dokonali jego bezpośredni lub pośredni uczniowie: Jan i Jakub Bernoulliowie, J. Hermann, A. de L'Hôspital, P. Varignon, G. Cramer, a szczególnie L. Euler.

---

[9] Próby budowy analizy oparte na środkach czysto algebraicznych podjęto dopiero w połowie XVIII w. Dokonał tego angielski matematyk J. Landen w pracy *Rozprawa o analizie różnicowej: nowa gałąź sztuki algebraicznej* (*A discourse concerning residual analysis: a new branch of algebraic art*, London 1758). Do idei tej nawiązali niezależnie J. Kirkby, J. Glenie, J. L. Lagrange i L. F. Arbogast a następnie F. J. Servois, G. von Buquoy, C. A. Aghard i J. B. Braseur. Por. F. C a j o r i, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Chicago–London 1919, s. 225-238; M. C a n t o r (ed.), *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, t. III, Leipzig 1913, s. 674; G. C r a i g F r a s e r, *The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th-century*, „Archive for History of Exact Science", 39(1989) s. 317-335. Tylko o Lagrange'a koncepcji algebraizacji analizy pisze C. G. Fraser (*Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus*, „Historia Mathematica" 14(1987), s. 38-53; t e n ż e, *The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th-century*, „Archive for History of Exact Science" 39(1989), s. 317-335. O koncepcji podstaw rachunku różniczkowego Leibniza w kontekście prac z analizy matematycznej Lagrange'a pisze René Taton (*Lagrange et Leibniz: De la théorie des fonctions au principe de raison suffisante*, w: A. H e i n e k a m p (ed.), *Beiträge zur Wirkungs – und Rezeptionsgeschichte von Gottfried Wilhelm Leibniz*, Stuttgart 1986 s. 139-147, Steiner.

3. L. EULERA IDEA RACHUNKU NIESKOŃCZENIE MAŁYCH

Spuścizna Eulera[10] jest olbrzymia. Spośród 30 tomów serii matematycznej dzieł zebranych, 19 poświęconych jest analizie. Najważniejsze są jednak trzy pozycje: *Wstęp do analizy nieskończoności* (*Introductio in analysin infinitorum*, v. 1-2, Lausannae 1748), *Rachunek różniczkowy* (*Institutiones calculi differentialis*, Petropoli 1755) oraz *Rachunek całkowy* (*Institutiones calculi integralis*, v. 1-3, Petropoli 1768). W każdym z tych dzieł Euler rozwija algorytmiczny punkt widzenia na zagadnienia rachunku różniczkowego i całkowego. Problematykę rachunku różniczkowego opracowuje w wielu wypadkach od nowa, konsekwentnie eliminując intuicję geometryczną i mechaniczną w jego podstawach pojęciowych i procedurach dowodowych.

W przeciwieństwie do swoich poprzedników, którzy uważali rachunek różniczkowy za powiązany z geometrią[11], Euler łączył go z algebrą i arytmetyką i traktował jako formalną teorię funkcji. Ideę tę wyrażał już *explicite* we *Wstępie do analizy nieskończoności*, gdzie pisał: „cała analiza obraca się wokół wielkości zmiennych i ich funkcji". Kluczowym pojęciem analizy dla Eulera jest zatem pojęcie funkcji. Uściślając definicję swojego nauczyciela – Jana Bernoulliego – Euler pisze: Funkcja ilości zmiennej jest to wyrażenie analityczne utworzone jakimkolwiek sposobem z tej zmiennej i z liczb, czyli ilości

---

[10] Spośród wielu monografii poświęconych Eulerowi na uwagę zasługuje stosunkowo niedawno wydana praca R. Thiele, *Leonhard Euler* (Leipzig 1982, Tenbuer).

[11] Widać to wyraźnie w pierwszych podręcznikach i monografiach. Pierwszy podręcznik do rachunku różniczkowego markiza de L'Hôspitala, *Analiza nieskończenie małych dla badania linii krzywych* (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1692) i wykłady Jana Bernoulliego zawierały mnóstwo zadań geometrycznych i fizycznych (optycznych i mechanicznych), ale bardzo niewiele pojęć analitycznych oraz ogólnych twierdzeń i reguł. Zawsze też pojęcia te były objaśniane za pomocą rysunków. Podobny charakter miała również reprezentatywna dla tego okresu praca P. Varignona *Wyjaśnienie do analizy nieskończenie małych* (*Éclaircissements sur l'analyse des infiniment petits*, Paris 1725), która z założenia miała być swoistym komentarzem do pracy de L'Hôspitala. W przeciwieństwie do tych tendencji we wstępie do *Rachunku różniczkowego* Euler pisze: „De usu autem huius calculi in Geometria linearum curvarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima Calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita ad hancque scientiam, cum vix satis essent evoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, ut ne ulla quidem figura opus fuerit ad omnia huius calculi praecepta explicanda". L. Euler, *Opera omnia*, ser. I: *Opera mathematica*, t. X, Berlin 1911, s. 9. Podobne tendencje dały się też zauważyć w pracy Fontenelle'a *Elementy geometrii nieskończoności* (*Élémens de la géométrie de l'infini*, Paris 1727). Obszerną analizę tej ostatniej pracy można znaleźć w artykule M. Blay, *Du fondement du calcul différentiel au fondement de le science du mouvement dans Élémens de la géometrie de l'infini de Fontenele*, w: H. J. Hess, *Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli*, F. Nagel (eds.), Stuttgart 1989 s. 99-122, Steiner Verlag Wiesbaden.

stałych[12]. Zmienną rozumie zaś jako element zbioru liczb rzeczywistych lub urojonych, co pozwala mu na jednakowe traktowanie funkcji zmiennej rzeczywistej i zespolonej. Następnie Euler przystępuje do systematycznego wykładu teorii funkcji elementarnych w czysto analitycznej postaci. Po raz pierwszy znajdujemy tutaj wyraźną definicję funkcji logarytmicznej jako funkcji odwrotnej do wykładniczej. Przy tej okazji otrzymuje rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji wykładniczej, a w szczególnym wypadku tego rozwinięcia otrzymuje liczbę *e* i oblicza ją z dokładnością do 24 miejsc po przecinku[13].

Kolejnym osiągnięciem Eulera było zdefiniowanie funkcji trygonometrycznych *sin* i *cos* oraz powiązanie ich z funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej. W przeciwieństwie do R. Cotesa, który pierwszy wprowadził to twierdzenie, ale w postaci geometrycznej Euler formułuje je czysto analitycznie i wiąże z pozostałymi elementami teorii funkcji. W pierwszej części *Rachunku różniczkowego* Euler przedstawia szczegółowe algorytmy różniczkowe stosując symbolikę, która w niczym nie odbiega od współczesnej. Druga część tej pracy zawiera zastosowania rachunku różniczkowego do teorii szeregów nieskończonych, równań algebraicznych i przestępnych oraz teorii ekstremów. Właśnie w kon-

[12] „Functio quantitatis est expressio analytica quamodocunque composita ex illa quantitate variabilis et numeris seu quantitatibus constantibus". L. E u l e r, *Introductio in analysin infinitorum*, Lipsiae–Berolini 1748, s. 18. Stosunkowo niedawno ukazało się tłumaczenie tej ważnej pracy na język angielski: L. E u l e r, *Introduction to analysis of the infinite*, t. I. (trans. J. D. Blanton), New York 1988. Springer–Verlag. Euler posługiwał się wąskim i szerokim pojęciem funkcji. We *Wstępie do analizy nieskończoności* zastosował wąskie pojęcie funkcji, ale już w *Metodzie znajdowania linii krzywych* posługiwał się szerokim pojęciem funkcji obejmujących także przypadki funkcjonału. Na początku drugiego tomu *Wstępu do analizy nieskończoności* dzielił funkcje na ciągłe („continuae"), nieciągłe („discontinuae") i mieszane („mixtae"). Terminologia ta jest specyficzna dla Eulera, gdyż ciągłość funkcji utożsamia on z możliwością jej przedstawienia w całej dziedzinie za pomocą jednego wyrażenia analitycznego. Z czasem Euler zrewidował swoje stanowisko rozszerzając zarazem zakres pojęcia funkcji. Na początku pierwszej części *Rachunku różniczkowego* pisze: „Gdy pewne ilości zależą od innych w taki sposób, że przy zmianie tych ostatnich one same ulegają też zmianie, to pierwsze nazywamy funkcjami drugich". „Ex iis, quae in libro superiori de quantitatibus variabilibus atque functionibus sunt exposita, perspicuum est, prout quantitatis variabilis actu variatur, ita omnes eius functiones variationem pati". (*Opera*, I-10, s. 4). Por. także J. D h o m b r e s, *Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues: Véritable programme d'organisation de l'analyse au 18-e siècle*, „Cahiers du Séminar d'Histoire des Mathématiques", 9(1988), s. 24-97.

[13] Po raz pierwszy liczbę *e* jako granicę ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$ wprowadził Daniel Bernoulli w liście do Golbacha z 30 stycznia 1729r. Była to wartość, dla której funkcja $(x)^{\frac{1}{x}}$ osiąga maksimum. W oznaczeniach Bernoulliego wyglądało to następująco $x = (A + \frac{1}{A})^A$, gdzie $A = \infty$. Zarówno u Bernoulliego, jak i u Eulera daje się zauważyć przy tej okazji brak należytej ostrożności przy posługiwaniu się formalizmem zakładającym operacje infinityzymalne. Por. P. N. F u s s, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle*, St. Pétersbourg 1843, t. II, s. 246-247.

tekście omawiania zastosowań rachunku różniczkowego w teorii szeregów nieskończonych, w szególności zaś do przedstawiania funkcji za pomocą ich rozwinięć w nieskończone szeregi potęgowe przejawia się formalistyczna orientacja Eulera. Brak badania warunków zbieżności był powszechny w tym czasie, kryteria zbieżności szeregów nie były jeszcze dostatecznie opracowane i dopiero prace Lagrange'a, Cauchy'ego i Abela przyniosły zadowalający poziom ścisłości, ale Euler posuwa się dalej – operuje szeregami potęgowymi poza przedziałem zbieżności, co w praktyce prowadzi do s u m o w a n i a s z e r e g ó w r o z b i e ż n y c h. Tym samym szerzej rozumie pojęcie s u m y s z e r e g u n i e s k o ń c z o n e g o. Matematycy tej epoki rozumieli je głównie jako granicę sum częściowych szeregu, on natomiast pojmował s u m ę s z e r e g u jako skończone wyrażenie analityczne, z którego rozwinięcia otrzymuje się ten szereg.
Wyjaśnia to szczegółowo w III rozdziale pierwszej części *Rachunku różniczkowego* na przykładzie szeregu $\frac{1}{1-x}$.

Argumentując na rzecz swojego stanowiska, powołuje się na heurystyczną płodność takiego uogólnienia, na praktyczne korzyści, jakie przynosi w pośrednich krokach rozumowania, tzn. w procedurach dowodowych oraz wskazuje na fakt, że uogólniona definicja w wypadku szeregu zbieżnego przechodzi w węższe rozumienie pojęcia s u m a s z e r e g u n i e s k o ń c z o n e g o. Sprzyjało to poszerzeniu możliwości operowania szeregami nieskończonymi, a w efekcie umacniało stanowisko algorytmiczno – algebraiczne. Wielki autorytet naukowy Eulera tym samym w sposób zasadniczy zaważył na utrwaleniu i rozpropagowaniu omawianych tendencji.

W pierwszym tomie *Rachunku całkowego* podaje algorytmy całkowania funkcji jednej zmiennej i równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego. W drugim tomie podaje stosowny algorytm w wypadku równań różniczkowych wyższych rzędów, a w trzecim omawia równania różniczkowe cząstkowe. Również i tutaj Euler podkreśla swoje operacjonistyczne stanowisko, konsekwentnie eliminując rolę geometrii poprzez rozwój symboliki analitycznej i algorytmów całkowych, pozwalających rozwiązywać wiele zadań na kwadratury, kubatury czy znajdowanie środków ciężkości za pomocą aparatu analitycznego. Na gruncie formalizmu analitycznego ukazywała się wewnętrzna jedność geometrii i arytmetyki, a przez to i całej matematyki. Heurystyczna płodność nowego formalizmu była tym czynnikiem, który dodatkowo umocnił wiarę matematyków w skuteczność procedury algorytmizacji metod rachunku różniczkowego i całkowego i spowodował przeniesienie tych tendencji na nowo odkryte obszary matematycznych badań, w szczególności zaś do teorii izoperymetrów. Dzieła tego dokonał w znacznej mierze sam Euler. Poprzedziły je jednak wieloletnie wysiłki, mające na celu wyodrębnienie problematyki izoperymetrów a następnie usamodzielnienie tej dyscypliny matematycznej przez nadanie jej charakterystycznej notacji i metod rozwiązywania specyficznych dla niej zagadnień.

THE NEW IDEAS IN XVII-TH AND XVIII-TH CENTURY MATHEMATICS

S u m m a r y

The seventeeth-century method of analysis directed its attention toward a domain of well-defined class of problems, such as the construction of tangents to curves, the finding of maxima and minima, and the computation of quadrature. It aimed to treat those problems by means of symbolic algebra. The analytic geometry of Fermat and Descartes, and an even more works of Newton, Leibniz and Euler, enhanced the possibility of treating the questions, not as individual problems for each curve, but by means of general method which would apply to all curves of a certain type. Classification into types would be undertaken by considering the algebraic form of the equation of the curve. It might then be hoped that by a process of refinement these algorithms could be combined to form an even more general solution.

D'Alembert, Euler, and Lagrange insisted that appeals to geometry and mechanics do not belong in a proper treatment of analysis. Their reasons for repudiating geometrical and mechanical arguments for general results in calculus originated in adopting a general philosophical picture of proper structure of the sciences. From this point of view deriving theorems of general sciences (analysis) from principles of special sciences (mechanics) is an intolerable offence against correct method. My aim is not to rehearse the familiar account of the historical development of the calculus, but rather to cast light on the relations among such concepts of the philosophy of nature as space, time and motion and new analytical method, relations which have not previously been sufficiently explicated.